فصل ۲: مفاهیم اساسی احتمال

Chapter 2, Section 1.2

۱. یادآوری تئوری مجموعه‌ها
۲. فضای احتمال و تعریف اصولی احتمال
۳. تعیین احتمال واقعه‌ها و تعاریف دیگر احتمال
۴. مروری بر آنالیز ترکیبی
۵. مثالهایی از تعیین احتمال واقعه‌ها در آزمایشهای با نتایج هم احتمال
۶. احتمال شرطی
۷. قضیهٔ احتمال کل
۸. قضیهٔ بیز
۹. وقایع مستقل

ابتدا می‌خواهیم تئوری مجموعه‌ها را بررسی کنیم. ولی اول آشنا شویم که چرا در احتمال با تئوری مجموعه‌ها سر و کار (فراوان) می‌یابیم. اصولاً در احتمال با مشاهدات یا آزمایشهای تصادفی سر و کار داریم.

آزمایش تصادفی (Random Experiment) آزمایشی است که نتیجهٔ آن از پیش معلوم نیست، مثلاً انداختن تاس یا سکه.

طبق تعریف **فضای نمونه‌ها (Sample Space)** عبارت است از مجموعهٔ کلیهٔ نتایج (Outcome) ممکنه برای یک آزمایش تصادفی که آن را با Ω (یا S) نمایش می‌دهیم (توجه کنید که ممکن است آزمایشی فقط یک بار انجام شود، ولی در عین حال آزمایش تصادفی باشد) و احتمال برای هر زیر مجموعه‌ای از Ω تعریف می‌شود.

$$\Omega \; \boxed{\begin{array}{lll} \bullet\omega_1 & & \bullet\omega_2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet\omega_N \end{array}}$$

ω_i : نقاط نمونه

مثلاً در آزمایش انداختن سکه داریم: $\Omega=\{H,T\}$ که ۲ عضو دارد.

یا در آزمایش انداختن تاس داریم: $\Omega=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ که ۶ عضو دارد.

هر زیر مجموعه از فضای نمونه را **واقعه (Event)** می‌نامند. احتمال برای واقعه‌ها تعریف می‌شود.

مثلاً واقعهٔ زوج آمدن عدد تاس عبارت است از:

$$A=\{f_i : \text{زوج باشد } i\}=\{f_2, f_4, f_6\}$$

به همین لحاظ به تئوری مجموعه‌ها نیازمندیم.

یادآوری تئوری مجموعه‌ها:

مجموعه (Set): دسته‌ای از اشیاء را مجموعه گویند. مانند: $\{a, b, 2,$ توپ$\}$.

هر عضو مجموعه را یک **عنصر (Element)** گویند. تعداد اعضای مجموعه می‌تواند محدود، نامحدود قابل شمارش (تناظر یک به یک با اعداد طبیعی) یا غیرقابل شمارش باشد. ترتیب در اعضای مجموعه‌ها مهم نیست.

مجموعهٔ A را **زیرمجموعهٔ** مجموعهٔ B گویند: $A \subset B$، اگر و تنها اگر هر عضو A متعلق به B نیز باشد.

مجموعهٔ A را **مساوی** مجموعهٔ B گویند، اگر و تنها اگر $A \subset B$ و $B \subset A$.

مجموعهٔ شامل تمام عناصر (المانهای) مورد نظر را **مجموعهٔ مرجع** Ω گویند.

مجموعهٔ فاقد عضو را **تهی** گویند: $\{\ \}$ یا $\varnothing$.

اجتماع (اتحاد) (Union):

مجموعهٔ $A \bigcup B$ (یا $A+B$)، مجموعهٔ عناصری است که در A یا در B باشند (یا در A یا در B یا در هر دو).

اشتراک (Intersection):

مجموعهٔ $A \bigcap B$ (یا AB)، مجموعهٔ عناصری است هم در A و هم در B باشند.

دو مجموعه را **جداازهم (Disjoint)** گویند، اگر و تنها اگر $A \bigcap B = \varnothing$، یعنی عضو مشترکی نداشته باشند.

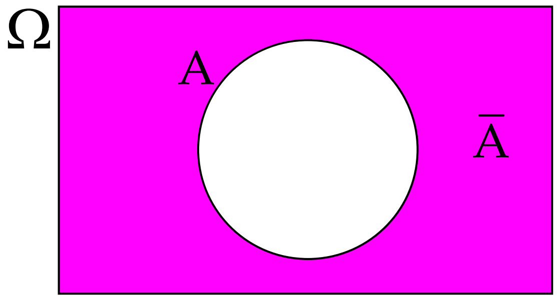
مکمل یک مجموعه (Complement):

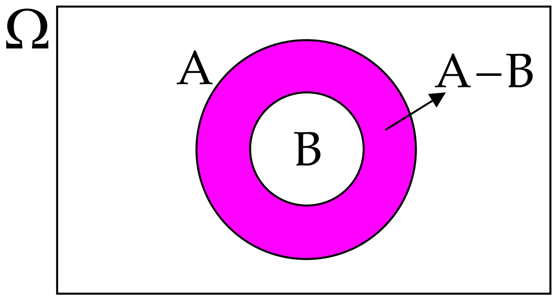
مکمل مجموعهٔ A، مجموعه‌ای است شامل تمام اعضای مجموعهٔ مرجع که در A نباشند و آن را با A^c یا $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم.

طبق تعریف تفاضل دو مجموعهٔ A و B برابر است با:

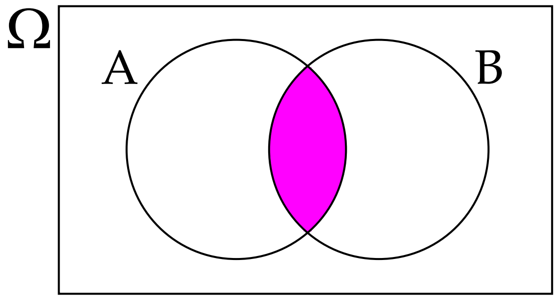
$$A - B = A \bigcap \overline{B}$$

دیاگرام وِن (Venn Diagram):

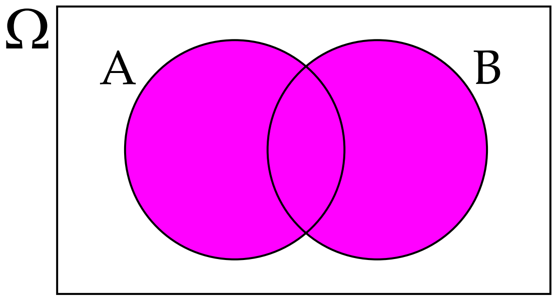




$B \subset A$



$A \cap B$



$A \cup B$

از تعاریف فوق (به سادگی) می‌توان نتیجه گرفت:

1) $A\bigcup\Omega=\Omega$ 2) $A\bigcap\Omega=A$ 3) $A\bigcup\varnothing=A$ 4) $A\bigcap\varnothing=\varnothing$

5) $B\subset A\Rightarrow A\bigcup B=A$ 6) $B\subset A\Rightarrow A\bigcap B=B$

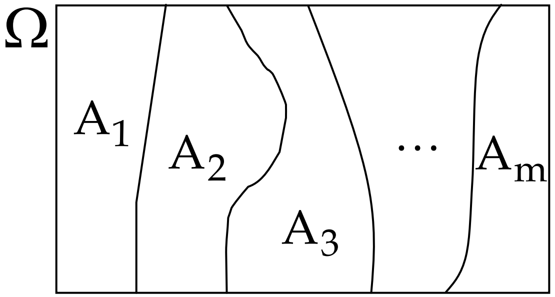
7) قانون تعدّی : $A\subset B , B\subset C\Rightarrow A\subset C$ 8) قانون جابجایی : $A\bigcup B=B\bigcup A , A\bigcap B=B\bigcap A$

9) قانون شرکت‌پذیری (یعنی پرانتز لزومی ندارد) : $\begin{cases}(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)\\(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)\end{cases}$

10) قانون توزیع‌پذیری : $\begin{cases}(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)\\(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)\end{cases}$

11) قوانین دمورگان : $\begin{cases}\overline{(A\bigcup B)}=\bar{A}\bigcap\bar{B}\\\overline{(A\bigcap B)}=\bar{A}\bigcup\bar{B}\end{cases}$

افراز:



اگر مجموعه‌های غیرتهی $A_1, A_2, \dots, A_m$ آن‌چنان باشند که:

$$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$$

گوییم A_iها افرازی از Ω هستند.

حاصلضرب دکارتی:

حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ A (با عناصر α_i) در مجموعهٔ B (با عناصر β_j) عبارت است از مجموعهٔ تمام زوج مرتب‌های به صورت (α_i, β_j) و به صورت $C = A \times B$ نشان داده می‌شود.

اگر A، m عضو و B، n عضو داشته باشد، $A \times B$، mn عضو خواهد داشت (می‌دانید که ترتیب در زوج مرتب مهم است).

مثال: حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ $A = \{H, T\}$ در خودش برابر است با:

$$C = A \times A = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

حال می‌توانیم تعریف اصولی احتمال را مطرح کنیم.

فضای احتمال:

فضای احتمال یا مدل احتمالاتی یک آزمایش از عوامل زیر تشکیل می‌شود:

۱. مجموعهٔ Ω شامل کلیهٔ نتایج ممکنهٔ ω_i برای آزمایش

۲. زیرمجموعه‌های Ω که واقعه نامیده می‌شوند.

۳. عدد $P(A)$ که به هر یک از واقعه‌ها (طبق اصول موضوعه) نسبت داده می‌شود.

فضای نمونه‌ها (Sample Space) $\Omega =$: مجموعهٔ کلیهٔ نتایج ممکنه برای یک آزمایش تصادفی

در آزمایش انداختن سکه:

دارای ۲ عضو : $\Omega=\{H,T\}$

در آزمایش انداختن دو سکه:

دارای ۴ عضو : $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

در آزمایش انداختن دو تاس:

دارای ۳۶ عضو : $\Omega=\{(f_i, f_j) : i,j=1,2,\dots,6\}$

در مداری با چهار سوئیچِ ON/OFF (0 یا 1):

دارای ۱۶=۲^۴ عضو (اعداد چهار بیتی باینری تصادفی) : $\Omega=\{0000,0001,\ldots,1110,1111\}$

طول عمر یک المان الکتریکی در مدار:

$$\Omega=\{T:0\leq T<+\infty\}$$

ولتاژ نویز روی یک مقاومت:

$$\Omega=\{V:-\infty<V<+\infty\}$$

واقعه (Event): هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ها را واقعه گویند.

در آزمایش انداختن تاس:

$$A=\{f_i:i\leq 4\}=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$$

در آزمایش انداختن دو سکه:

$A=\{$حداقل یکی از سکه‌ها شیر باشد$\}=\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$

در مورد طول عمر یک المان الکترونیکی:

$A=\{$عمر المان بیش از ۵ ساعت نباشد$\}=\{T:0\leq T\leq 5h\}$

گوییم واقعهٔ A اتفاق افتاده است، هر گاه نتیجهٔ آزمایش یکی از اعضای A باشد.

توجه کنید که در یک بار انجام آزمایش تصادفی (Trial)، یک نتیجه (پیشامد) (Outcome) حاصل می‌شود (یکی از اعضای Ω)، ولی همزمان واقعه‌های مختلفی اتفاق افتاده‌اند.

از جملهٔ زیرمجموعه‌های Ω (واقعه‌ها)، خود Ω و $\varnothing$ هستند.

Ω را **واقعهٔ حتمی (Sure Event)** گویند، زیرا نتیجهٔ آزمایش مسلماً عضو Ω است. پس Ω اتفاق می‌افتد.

$\varnothing$ را **واقعهٔ ناممکن** یا **واقعهٔ خنثی (Null Event)** می‌گویند که هرگز اتفاق نمی‌افتد، زیرا نتیجهٔ آزمایش نمی‌تواند عضوی از اعضای $\varnothing$ باشد!

دو واقعهٔ A و B را **ناسازگار** (**مانعه الجمع** یا **غیرمتلاقی**) گویند، هر گاه مجموعه‌های A و B جداازهم باشند، یعنی:

$$A \cap B = \varnothing$$

واقعه‌ای را که تنها یک عضو داشته باشد، **واقعهٔ ساده** گویند. مثلاً واقعهٔ اینکه در آزمایش انداختن تاس عدد ۲ بیاید:

$$A=\{f_2\}$$

توجه کنید که f_2 (Outcome) با $\{f_2\}$ (Event) فرق دارد.

(در بعضی کتابها، Event، پیشامد ترجمه شده است.)

البته نحوهٔ تعریف واقعه و نتیجه به نظر و مشخصات مورد توجه ما بستگی دارد.

مثلاً ممکن است بگوییم: $\Omega=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ که در این صورت { زوج } یک واقعهٔ ۳ عنصری است.

یا ممکن است بگوییم: { فرد , زوج }=Ω که در این صورت { زوج } یک واقعهٔ ساده خواهد بود.

از طرف دیگر ممکن است محل قرار گرفتن تاس روی میز هم مورد نظر ما باشد که در این صورت دیگر $\{f_2\}$ نیز یک واقعهٔ مرکب متشکل از بی‌نهایت عنصر خواهد بود.

حال که فضای نمونه و واقعه معلوم شد، قسمت سوم مدل، نسبت دادن احتمال به واقعه‌ها است.

تعریف Axiomatic:

به هر واقعهٔ A عدد $P(A)$ نسبت داده می‌شود به طوری که (اصول کولموگروف):

اصل (۱): $P(A)\geq 0$؛

اصل (۲): $P(\Omega)=1$؛

اصل (۳): اگر واقعه‌های A و B ناسازگار باشند ($A\cap B=\varnothing$)، آنگاه: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

اصل ۳ با تکرار آن برای هر تعداد محدودی از وقایع قابل بیان است، ولی نه برای تعداد نامحدود. اگر عناصر فضای نمونه نامحدود باشند، باید به جای اصل ۳، اصل قوی‌تری را جایگزین کرد.

اصل (′۳): اگر A_1، A_2 و ... دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

این را اصل جمع‌پذیری نامحدود (قابل شمارش) گویند (اصل ۳ حالت خاصی از اصل ′۳ است).

[یا معادلاً می‌توانیم در کنار اصل ۳، اصل دیگری را اضافه کنیم که پیوستگی احتمال است. اگر B_1، B_2 و ... یک سری مجموعهٔ همگرا (صعودی یا نزولی) باشند، آنگاه:

$$P(\lim_{n\to+\infty} B_n)=\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$$

به راحتی با مفروض گرفتن اصل ′۳ می‌توان پیوستگی را ثابت کرد (کتاب راس، صفحهٔ ۴۸).]

حال با استفاده از همین اصول می‌توانیم احتمال واقعه‌های مختلف را از روی احتمال واقعه‌های داده شده به دست آوریم.

قضیهٔ ۱: $P(\bar{A})=1-P(A)$؛

زیرا:

$$\Omega=A\cup\bar{A}$$

$$P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})$$

$$\underset{\downarrow \text{اصل ۱}}{1} = \underset{\downarrow \text{اصل ۲}}{P(A)+P(\bar{A})} \Rightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$$

قضیهٔ ۲: $P(\varnothing)=0$؛

زیرا:

$$\varnothing=\bar{\Omega}$$

$$P(\varnothing)=P(\bar{\Omega})=1-P(\Omega)=1-1=0$$

خواهیم دید که اگر چه احتمال واقعهٔ ناممکن صفر است، اما هر چه احتمالش صفر باشد را نمی‌گوییم ناممکن! و به همین ترتیب اگر چه احتمال واقعهٔ حتمی یک است $(P(\Omega)=0)$، ولی هر چه احتمالش یک باشد، حتمی نیست!

قضیهٔ ۳: $P(A)\leq 1$؛

زیرا طبق قضیهٔ ۱ داریم:

$$P(A)=1-P(\bar{A}) \rightarrow P(\bar{A})\geq 0 \Rightarrow P(A)\leq 1$$

(پس $0\leq P(A)\leq 1$ است.)

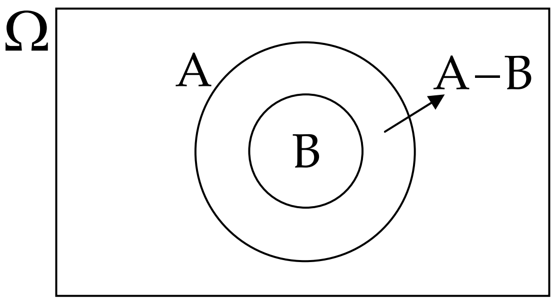
قضیهٔ ۴: اگر $B\subset A$ باشد، آنگاه: $P(B)\leq P(A)$؛

زیرا:

$$A=B\cup(\underbrace{A\cap\bar{B}}_{A-B})$$

چون B و $A\cap\bar{B}$ جدااز‌هم هستند، طبق اصل ۳ داریم:

$$P(A)=P(B)+P(A\cap\bar{B}) \rightarrow P(A\cap\bar{B})\geq 0 \Rightarrow P(B)\leq P(A)$$



$B\subset A$

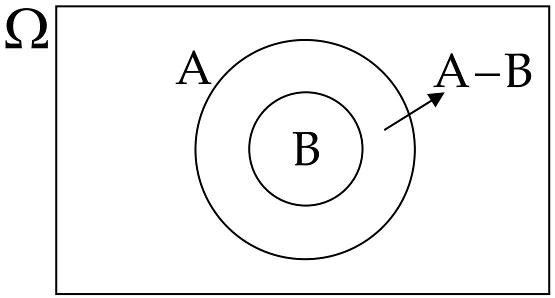
قضیهٔ ۵: اگر $B \subset A$ باشد، آنگاه: $P(A-B)=P(A)-P(B)$؛

زیرا:

$$A=B\cup(A-B)$$

چون B و $A-B$ جداازهم هستند، طبق اصل ۳ داریم:

$$P(A)=P(B)+P(A-B) \Rightarrow P(A-B)=P(B)-P(A)$$



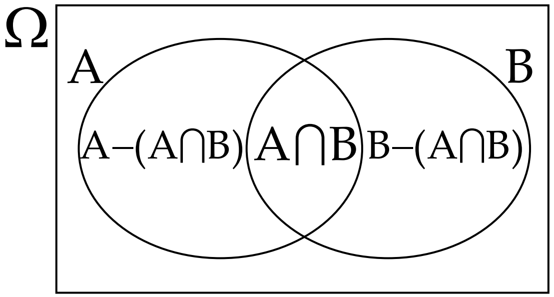
$B \subset A$

قضیهٔ ۶: برای هر دو مجموعهٔ A و B (نه لزوماً ناسازگار) داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اثبات:

$$\left.\begin{cases} P(A\cup B)=P(A\cup(\bar{A}\cap B))=P(A)+P(\bar{A}\cap B) \\ B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) \Rightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) \end{cases}\right\}\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



یا به روش دیگر:

این سه مجموعه جداازهم هستند : $A\cup B=(B-(A\cap B))\cup(A\cap B)\cup(A-(A\cap B))$

$$\begin{aligned} P(A\cup B)&=P(B-(A\cap B))+P(A\cap B)+P(A-(A\cap B)) \\ &=P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B) \\ &=P(B)+P(A)-P(A\cap B) \end{aligned}$$

تعیین احتمال واقعه‌ها:

گفتیم که برای مدل کردن یک آزمایش تصادفی باید احتمال کلیهٔ واقعه‌ها را تعیین کنیم (یک مجموعهٔ N عضوی، 2^N زیرمجموعه دارد). ولی با توجه به اصول موضوعه (و قضایا) نیازی نیست که به هر واقعه احتمالی نسبت دهیم. مثلاً اگر $P(A)$ را معلوم کنیم، $P(\bar{A})=1-P(A)$ خودبه‌خود معلوم خواهد بود. لذا با مشخص کردن احتمال یک تعداد حداقل واقعه، احتمال همهٔ واقعه‌ها معلوم خواهد بود. مثلاً اگر Ω متشکل از N نقطهٔ نمونهٔ $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ باشد، کافی است احتمال وقایع سادهٔ $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\ldots,\{\omega_N\}$ را بدانیم. در این صورت اگر مجموعهٔ A شامل $\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots,\omega_{k_r}$ باشد، طبق اصل ۳ خواهیم داشت:

$$P(A)=P\{\omega_{k_1}\}+P\{\omega_{k_2}\}+\cdots+P\{\omega_{k_r}\}$$

اگر $P\{\omega_i\}$ را P_i بنامیم، طبق اصل ۱ باید $P_i \geq 0$ بوده و طبق اصل ۲ باید $\sum_{i=1}^{N} P_i=1$ باشد. ولی P_iها از هر حیث دیگر اختیاری هستند (در تعریف اصولی).

حال اگر تعداد عناصر Ω نامحدود، ولی قابل شمارش باشد، باز هم بحث فوق صادق است و با تعیین $P_i=P\{\omega_i\}$ها که $P_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{+\infty} P_i=1$، فضای احتمال مشخص می‌شود (مثلاً $P_1=\frac{1}{2}$، $P_2=\frac{1}{4}$، $P_3=\frac{1}{8}$ و ...).

ولی اگر تعداد عناصر Ω نامحدود غیرقابل شمارش باشد، مثلاً فضای نمونهٔ زمان شروع یک مکالمهٔ تلفنی (یا زمان خراب شدن یک المان الکترونیکی)، در اینجا هر فاصلهٔ $\{t_1 \le t \le t_2\}$ یک واقعه است و $\Omega=\{0\le t\le +\infty\}$.

اغلب در چنین مواردی احتمال واقعهٔ سادهٔ $P\{t=t_i\}$ برابر صفر است، اگر چه Ω اجتماع این واقعه‌های ساده است.

(این مسئله تناقضی با اصل ۳ یا اصل ′۳ ندارد، زیرا این اصول برای حالت غیرقابل شمارش نبودند.)

(اگر چه احتمال واقعهٔ ناممکن صفر است، اما هر چه احتمالش صفر باشد ناممکن تلقی نمی‌شود.)

در اینجا فضای احتمال را نمی‌توان با احتمال واقعه‌های ساده مشخص کرد. در عوض باید احتمال بازه‌ها را معین کرد. برای این منظور تابعی را که بیانگر چگالی احتمال است معرفی می‌کنیم:

$$P\{t_1 \le t \le t_1 + dt\} = \alpha(t_1)dt$$

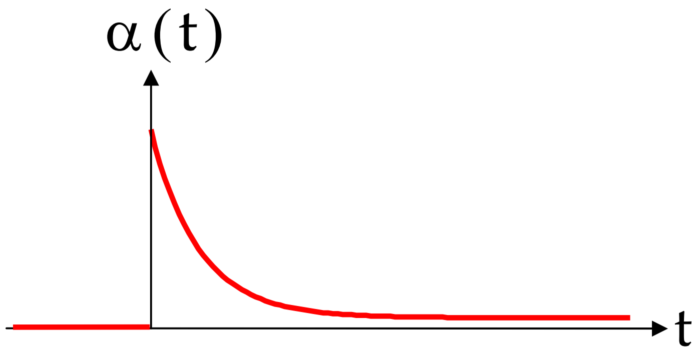
یا:

$$P\{t_1 \le t \le t_2\} = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt$$

چون احتمال هیچ فاصله‌ای نمی‌تواند منفی شود، پس: $\alpha(t)\ge 0$ و چون احتمال Ω یک است، باید داشته باشیم:

$$\int_{\Omega} \alpha(t)dt = 1$$

در مثال بالا که $\{0\leq t\leq +\infty\}$ بود، خواهیم داشت:



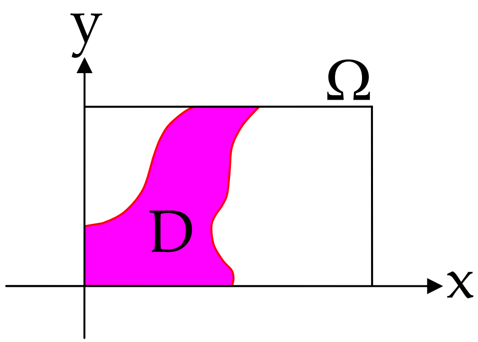
$$\int_0^{+\infty} \alpha(t)dt=1$$

چون کلیهٔ واقعه‌های Ω به صورت اجتماع و اشتراک فواصل $[t_1,t_2]$ قابل بیان هستند، به این ترتیب احتمال کلیهٔ واقعه‌ها تعیین شده است.

به همین ترتیب در فضای دوبُعدی نیز داریم:

$$P\{(x,y)\in D\}=\iint_D \alpha(x,y)dxdy$$

که $\alpha(x,y)$ یک رویه است و باید داشته باشیم:



$$\alpha(x,y)\geq 0 \quad , \quad \iint_\Omega \alpha(x,y)dxdy=1$$

مثلاً موقعیت یک شیء.

ما احتمال را بر مبنای تعریف اصولی پی‌ریزی می‌کنیم، ولی از تعاریف دیگر با توجه به اشکالاتشان نه به عنوان تعریف بلکه در مراحل ۱ و ۳ مدل‌سازی برای ایجاد ارتباط مدل با جهان خارج استفاده می‌نماییم.

تعریف ذهنی (شخصی) (Subjective): احتمال به عنوان معیاری از میزان اعتقاد به یک امر

مثلاً با قرائن و شواهدی که در آسمان می‌بینیم، می‌گوییم به احتمال ۸۰٪ فردا باران می‌بارد. احتمال‌هایی که در چنین جمله‌ای بدان اشاره می‌شود، اندازهٔ اعتقاد فرد گوینده است. روشن است که این تعریف وابسته‌به‌فرد، نمی‌تواند مبنای یک تئوری ریاضی و مستحکم قرار گیرد. اما می‌توانیم در مواردی از آن برای نسبت دادن معقول $P(A_i)$ها در تعریف Axiomatic استفاده کنیم. به نظر منطقی می‌رسد که احتمال به عنوان اندازهٔ اعتقاد نیز باید اصول احتمال را رعایت کند. مثلاً اگر کسی می‌گوید ۷۰٪ مطمئن هستیم که کتاب *تجرید الاعتقاد* نوشتهٔ *خواجهٔ طوسی* می‌باشد و ۲۰٪ مطمئن هستیم که آن را *ابوریحان* نوشته است، پس منطقی است که بگوییم به اعتقاد ما به احتمال ۹۰٪ یکی از این دو نفر این کتاب را نوشته است. در بحث تخمین از این تعبیر احتمال سود خواهیم برد.

تعریف فراوانی (فرکانس) نسبی (تعریف آماری یا تجربی):

اگر یک آزمایش تصادفی را به کرّات (n بار) انجام دهیم و در این n بار، n_A بار واقعهٔ A اتفاق افتد، علی‌الاصول «برای n بزرگ، $P(A)$ عددی نزدیک به $\frac{n_A}{n}$ خواهد بود»، یعنی: $P(A)\simeq\frac{n_A}{n}$. این دیگر Subjectiv نیست و قابل بررسی تجربی است.

مثلاً در آزمایش پرتاب سکه: $\Omega=\{H,T\}$ است. اگر $A=\{H\}$ باشد، برای محاسبهٔ $P(A)$، سکه‌ای را به کرّات پرتاب می‌کنیم:

آزمایش Pearson:

$$\frac{n_A}{n}=\frac{\text{تعداد شیرهای حاصله در پرتاب‌ها}}{\text{تعداد پرتاب‌ها}}=\frac{12012}{24000}=0.5005$$

یا در هر تولد: $\Omega=\{m,f\}$ است. اگر $A=\{m\}$ باشد، برای محاسبهٔ $P(A)$، داریم:

تعداد متولدین ذکور در سال ۱۹۶۰ در آمریکا:

$$\frac{n_A}{n}=\frac{2179708}{4257850}=0.5121$$

(مطالعات فراوان نشان داده که در واقع این عدد بیشتر از ۰/۵ است.)

ولی این تعریف خیلی شهودی و غیرریاضی است: «برای n بزرگ»، «عددی نزدیک به» و ...

پس این هم به عنوان تعریف احتمال قابل استفاده نیست. ولی در مراحل ۱ و ۳ برای ایجاد ارتباط بین $P(A)$ در مدل با نسبت تجربی $\frac{n_A}{n}$ و ربط دادن مدل به جهان خارج مفید است. حتی می‌توانیم برای اصول موضوعه و قضایای احتمال، تعبیر فرکانسی بیاوریم تا محسوس بودن آنها را نشان دهد.

مثلاً Ω در هر واقعه‌ای اتفاق می‌افتد، پس در n بار تکرار آزمایش، $n_{\Omega}=n$، یعنی: $P(\Omega)\simeq\frac{n_{\Omega}}{n}=1$.

یا مثلاً اگر واقعه‌های A و B ناسازگار باشند (مجموعه‌های A و B عنصر مشترکی ندارند، پس A و B توأماً اتفاق نمی‌افتند). پس در n بار تکرار آزمایش، اگر واقعهٔ A، n_A بار و واقعهٔ B، n_B بار اتفاق بیفتد، آنگاه:

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B$$

$$P(A\cup B)\simeq\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}\simeq P(A)+P(B)$$

یعنی با این تعریف دیگر نیازی به اصول موضوعه نیست و آنها قابل اثبات هستند.

تعریف بهتر:

$$P(A)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n_A}{n}$$

ولی چه دلیل ریاضی دارید که حد فوق وجود دارد؟ (و به چه دلیل اگر تکرار شود، دوباره همان حد می‌شود؟)

به علاوه چون n و n_A اعدادی هستند که از آزمایش به دست می‌آیند، هرگز نمی‌توانند نامحدود باشند. پس به این وسیله نیز مشکل این تعریف حل نشده است. مگر اینکه $P(A)$ را یک مفهوم تئوریک بدانیم (تعریف اصولی) و $\frac{n_A}{n}$ فقط برای تخمین صحت آن استفاده شود (در فصل تخمین در این باره دقیقاً صحبت خواهیم کرد). به علاوه در برخی آزمایش‌های تصادفی، امکان تکرار یا تکرار زیاد آزمایش وجود ندارد.

(طرفداران این نظریه می‌گویند که وجود این حد یک فرض یا اصل است، ولی این فرضی پیچیده و دور از ذهن است. ولی ما با استفاده از اصول کولموگروف که اصول ساده‌تری هستند، می‌توانیم این موضوع را که $\frac{n_A}{n}$ به سمت $P(A)$ میل می‌کند، ثابت کنیم که این اثبات را بعداً در قانون اعداد بزرگ خواهیم دید.)

تعریف کلاسیک:

اگر در یک آزمایش تصادفی، N نتیجهٔ ممکنه (N outcomes) وجود داشته باشد و N_A تا از آنها مطلوب باشند (تعداد اعضای واقعهٔ A، N_A باشد)، آنگاه:

$$P(A)=\frac{N_A}{N}$$

مثلاً در آزمایش انداختن تاس، احتمال اینکه عدد حاصل کوچکتر از 3 باشد، $\frac{2}{6}$ است، زیرا:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,2\}$ (از تقارن تاس، متساوی الاحتمال بودن نتایج را فرض کرده‌ایم)

البته باید به تفاوت N و n و نیز تفاوت N_A و n_A دقت شود. n تعداد آزمایش‌های انجام شده و n_A تعدادی از این آزمایش‌ها که واقعهٔ A اتفاق افتاده بود. در حالی که N تعداد نتایج ممکنه در یک آزمایش است و N_A تعدادی از این نتایج که عضو A باشند.

با این تعریف دیگر نیازی به اصول موضوعه نخواهد بود و همهٔ آنها قابل اثبات هستند. مثلاً اگر A و B ناسازگار باشند و واقعهٔ A، N_A عضو و واقعهٔ B، N_B عضو داشته باشد، $A\cup B$ دارای N_A+N_B عضو خواهد بود. لذا:

$$P(A\cup B)=\frac{N_{A\cup B}}{N}=\frac{N_A}{N}+\frac{N_B}{N}=P(A)+P(B)$$

اما تعریف کلاسیک، اگر نتایج آزمایش تصادفی متساوی الاحتمال (Equally Likely) نباشند، دیگر درست نخواهد بود.

مثلاً در آزمایش تصادفی تولد یک کودک که $\Omega=\{m,f\}$ است، وقایع $A=\{m\}$ و $B=\{f\}$ متساوی الاحتمال نیستند و لذا $P\{m\}=\frac{1}{2}$ صحیح نیست.

یا در آزمایش تصادفی رأی‌گیری دوحزبی که $\Omega=\{\alpha,\beta\}$ است، وقایع $A=\{\alpha\}$ و $B=\{\beta\}$ متساوی الاحتمال نیستند و لذا $P\{\alpha\}=\frac{1}{2}$ صحیح نیست.

به علاوه نتایج آزمایش ممکن است به گونه‌های مختلف تعبیر شود که لزوماً متساوی الاحتمال نباشند.

مثال: دو تاس را می‌اندازیم. احتمال این واقعه را می‌خواهیم که مجموع اعداد دو تاس مساوی ۷ باشد.

الف) نتایج ممکنه را می‌توانیم به صورت جمع‌های مختلف ممکنه بیان کنیم، یعنی اعداد ۲، ۳، ...، ۱۲. پس:

$$\Omega=\{2,3,\ldots,12\} \quad , \quad A=\{7\}$$

پس احتمال $\frac{1}{11}$ است!

ب) ممکن است بگوییم ۲۱ نتیجه داریم (بدون تمایز بین تاس اول و تاس دوم). پس:

$$\Omega=\{1-1,1-2,1-3,\ldots,5-6,6-6\} \quad , \quad A=\{1-6,2-5,3-4\}$$

پس احتمال $\frac{3}{21}$ است!

ج) ممکن است بگوییم ۳۶ نتیجهٔ ممکنه داریم (تمایز بین تاس اول و تاس دوم). پس:

$$\Omega=\{(i,j):i,j=1,2,\ldots,6\} \quad , \quad A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

پس احتمال $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ است.

که فقط در حالت آخر که نتایج متساوی الاحتمال هستند، جواب درست است.

به علاوه معمولاً متساوی الاحتمال بودن را صرفاً از روی نبودن دلیلی برای ترجیح بیان می‌کنیم که در مورد سکه یا تاس درست درمی‌آید، ولی دیدیم که در مورد تولد بچه درست درنمی‌آید.

به این ترتیب ما از تعریف کلاسیک نه به عنوان تعریف، بلکه در مواردی که متساوی الاحتمال بودن معقول باشد، برای انتخاب $P(A_i)$ها از آن استفاده می‌کنیم.

اصل ناکافی بودن دلیل: اگر یک آزمایش تصادفی دارای N نتیجهٔ ممکنهٔ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ باشد و ما هیچ اطلاعی در مورد نحوهٔ وقوع آنها نداشته باشیم، باید احتمال آنها را مساوی فرض کنیم، یعنی:

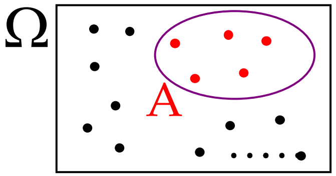
$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_N\}=\frac{1}{N}$$

تفاوت این اصل با تعریف کلاسیک این است که در تعریف کلاسیک می‌گوییم: می‌دانیم که نتایج متساوی الاحتمال هستند. ولی اینجا می‌گوییم: چون احتمال‌ها را نمی‌دانیم و هیچ دلیلی بر برتری و محتمل بودن یکی بر دیگری نداریم، آنها را متساوی الاحتمال فرض می‌کنیم.

در آزمایش با نتایج هم احتمال $P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_N\}=\frac{1}{N}$ می‌باشد. از تعریف اصولی هم داریم:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{N_A}\frac{1}{N}=\frac{N_A}{N}$$

این در واقع تعمیم اصل ۳ است، زیرا A اجتماع N_Aتا مجموعهٔ جداازهم با احتمال $\frac{1}{N}$ است.



در چنین مواردی برای معین کردن احتمال واقعه‌ها، کسب مهارت محاسبهٔ تعداد نقاطی از Ω که خاصیت معینی دارند لازم است و این کار به وسیلهٔ آنالیز ترکیبی (Combinational Analysis) صورت می‌گیرد.

مروری بر آنالیز ترکیبی:

ترتیب (جایگشت) (Permutation): تعداد نحوهٔ مرتب کردن m شیء از N شیء

فرض کنید N شیء (متمایز) داریم و می‌خواهیم m تا $(m\leq N)$ از آنها را انتخاب کرده و در یک خط بچینیم (ترتیب مهم است).

تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & \cdots & & m \\ \text{------} & & \text{------} & & \cdots & & \text{------} \\ N & \times & (N-1) & \times & \cdots & \times & (N-m+1) \end{array}$$

$$P_m^N = N\times(N-1)\times\cdots\times(N-m+1)=\frac{N!}{(N-m)!} : 0\leq m\leq N$$

نتیجه:

1) $P_m^N = (N-m+1)P_{m-1}^N$

۲) ترتیب N شیء (نحوهٔ مرتب کردن کلیهٔ N شیء):

$P_N^N = N\times(N-1)\times\cdots\times 1 = N!$ (طبق تعریف: $0!=1$)

در ترتیب (Permutation) فرض می‌کنیم تکرار مجاز نیست، یعنی وقتی شیئی را در جایگاه ۱ گذاشتیم، دیگر همان شیء نمی‌تواند در جایگاه دیگری هم باشد. ولی اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالات چقدر می‌شود؟

پاسخ N^m است.

مثلاً با اعداد ۱ تا ۹ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

$$\underline{\quad 9 \quad} \times \underline{\quad 9 \quad} \times \underline{\quad 9 \quad} \rightarrow 9^3=729$$

در حالی که:

$$P_3^9=9\times8\times7=504$$

این تعداد اعداد سه رقمی است که رقم تکراری نداشته باشند.

مثال: سه تاس را پرتاب می‌کنیم. تعداد حالات ممکنه چندتا است؟

$$\Omega=\{(f_1,f_1,f_1),(f_1,f_1,f_2),\ldots,(f_6,f_6,f_6)\}$$

یعنی $6^3=216$ حالت خواهیم داشت.

پس اگر آزمایشی با N نتیجهٔ ممکنه را mبار انجام دهیم، N^m حالت خواهیم داشت.

در حالت کلی‌تر اگر m آزمایش که تعداد نتایج ممکنهٔ هر یک $N_1, N_2, \ldots, N_m$ باشد، انجام شوند، تعداد نتایج ممکنهٔ کل m آزمایش برابر $N_1 N_2 \cdots N_m$ می‌باشد (تعداد عناصر حاصلضرب دکارتی $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_m$) (اصل شمارش).

ترکیب (Combination):

اگر N شیء (متمایز) داشته باشیم و بخواهیم یک گروه mتایی از میان آنها انتخاب کنیم (ترتیب دیگر مهم نیست)، داریم:

$$C_m^N = \binom{N}{m} = \frac{P_m^N}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!} : 0 \le m \le N$$

با توجه به رابطه روشن است که: $C_m^N = C_{N-m}^N$، زیرا هر زمان که m شیء را از Nتا انتخاب می‌کنیم، $N-m$تا را باقی می‌گذاریم.

مثال: کلاسی ۲۰ نفر دانشجو دارد. ۳ نفر برای صحبت با رئیس دانشگاه انتخاب می‌شوند. چند گروه نماینده متصور است؟

$$\text{تعداد حالات} = \binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1140$$

مثال: ۷ توپ سفید و ۳ توپ قرمز داریم. به چند طریق می‌توان این توپها را در ده جعبه قرار داد؟

□ .... □

۱ .... ۱۰

درست است که توپهای سفید از هم متمایز نیستند و توپهای قرمز نیز از هم متمایز نیستند، ولی جعبه‌ها از هم متمایزند. در واقع می‌توانیم از میان ده جعبه، ۳تا را برای قرار گرفتن توپهای قرمز انتخاب کنیم (یا معادلاً ۷تا را برای قرار گرفتن توپهای سفید انتخاب کنیم) و ترتیب جعبه‌های انتخابی مهم نیستند.

$$\text{تعداد حالات} = \binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3!} = 120$$

کلاً اگر N شیء تشکیل دو گروه بدهند، یک گروه mتایی و گروه دیگر $N-m$تایی، قرار دادن اینها در N جعبه (یا به خط کردن آنها) به $\binom{N}{m}$ طریق ممکن است.

مثال: تعداد اعداد باینری Nبیتی که m رقم 1 و $N-m$ رقم 0 داشته باشند؟

مانند مثال قبلی داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \binom{N}{m}$$

در Permutation دیدیم که اگر تکرار را مجاز می‌دانستیم، تعداد حالات به جای P_m^N می‌شود: N^m. ولی در ترکیب چه؟

مثلاً m توپ غیرمتمایز داریم که می‌خواهیم آنها را در N جعبه قرار دهیم:

- اگر در هر جعبه فقط یک توپ بتوان قرار داد؛

$$\text{تعداد حالات} = \binom{N}{m} : m \le N$$

- ولی اگر در هر جعبه به تعداد دلخواه (حتی کلیهٔ m توپ را) بتوان قرار داد، تعداد حالات چقدر خواهد بود؟ (در اینجا لازم نیست داشته باشیم: $m \le N$)

		....	

دیواره‌های میانی را هم به عنوان شیء در نظر بگیرید. گروه ۱ توپها هستند که تعداد آنها mتا است و گروه ۲ دیواره‌ها هستند که تعداد آنها $N-1$تا است. می‌خواهیم این $N+m-1$ شیء را در $N+m-1$ مکان قرار دهیم.

مثلاً اگر $N = ۳$ و $m = ۲$ باشد، گویی دو تا w و دو تا b داریم و می‌خواهیم آنها را در چهار مکان قرار دهیم:

bwbw
wbwb
bwwb
bbww
wbbw
wwbb

لذا با توجه به آنچه قبلاً (در مورد دو گروه) گفتیم، داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \binom{N+m-1}{m}$$

پس در مثال فوق داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

ضمناً نتیجه می‌گیریم به تعداد $\binom{N+m-1}{m}$ بردار N عنصری $(k_1,\ldots,k_N)$ با عناصر صحیح نامنفی k_i با شرط $k_1+k_2+\cdots+k_N=m$ وجود دارد.

سؤال: اگر الزام بداریم که هیچ یک از ظرفها نباید خالی بماند $(m \geq N)$، چند حالت خواهیم داشت؟

اکنون m توپ داریم. $m-1$ تا w را باید از میان $N-1$ تا فاصلهٔ بین توپها انتخاب کرد تا بین هر دو w حداقل یک b باشد. پس تعداد حالات برابر می‌شود با: $\binom{m-1}{N-1}$.

$$\overbrace{b\square b\square b\square\cdots\square b}^{\text{m-1 جای خالی}}$$
$$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\cdots\uparrow$$
$$\underbrace{ww\cdots w}_{\text{N-1 تا w}}$$

این معادل است با:

به تعداد $\binom{m-1}{N-1}$ بردار N عنصری $(k_1,k_2,\dots,k_N)$ با عناصر صحیح مثبت k_i ($i = 1, 2, \dots, N$ و $k_i > 0$) که $k_1+k_2+\cdots+k_N=m$ $(m \geq N)$ وجود دارد.

قضیهٔ دوجمله‌ای:

$$(x+y)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{N-k}$$

دلیل وجود ضریب $\binom{N}{k}$

(عین مثال عدد باینری N رقمی)

یا اثبات با استقراء و با استفاده از: $1\leq k\leq n$: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ (کتاب راس، ص ۸ و ۹)

حالت خاص: اگر $x=y=1$ باشد، داریم:

$$2^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}$$

مثال: دیدیم که تعداد اعداد باینری N بیتی که m رقم 1 داشته باشند، $\binom{N}{m}$ است.

پس تعداد کل اعداد باینری Nبیتی برابر است با:

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}=2^N$$

(2^N را از راه دیگری هم می‌توانید به دست آورید.)

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ N عضوی:

$$\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\binom{N}{2}+\cdots+\binom{N}{N}=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}=2^N$$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که عنصر خاصی از Ω را شامل باشند (تعداد واقعه‌هایی که نتیجهٔ خاصی را شامل باشند) 2^{N-1} است. یعنی در یک آزمایش یک نتیجه اتفاق می‌افتد، ولی 2^{N-1} واقعه اتفاق می‌افتند و 2^{N-1} واقعه اتفاق نمی‌افتند.

ترکیب تعمیم‌یافته:

در ترکیب از N شیء mتا را انتخاب می‌کردیم. در واقع N شیء را به دو گروه mتایی و $N-m$تایی تقسیم می‌کردیم و $C_m^N = \dfrac{N!}{m!(N-m)!}$ عبارت بود از تعداد حالات ممکنه برای تقسیم‌بندی به دو گروه. حال اگر N شیء داشته باشیم و بخواهیم آنها را به r گروه A_1، ... و A_r که به ترتیب m_1، ... و m_r عضو داشته باشند $(m_1+\cdots+m_r=N)$ تقسیم کنیم، تعداد حالات ممکنه برابر است با:

$$\binom{N}{m_1,m_2,\ldots,m_r} = C^N_{m_1,m_2,\ldots,m_r} = \frac{N!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}$$

ایدهٔ اثبات در کتاب:

$$\binom{N}{m_1}\binom{N-m_1}{m_2}\cdots\binom{N-m_1-m_2-\cdots-m_{r-1}}{m_r} = \frac{N!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}$$

در واقع برای $r = ۲$ همان فرمول ترکیب قبلی را خواهیم داشت. اثبات دیگر با نگاه به صورت و مخرج کسر مشخص است. همان‌طور که ترکیب را می‌توانستیم برای وقتی که اشیاء دو گروه را می‌خواهیم بچینیم استفاده کنیم، در اینجا نیز وقتی N شیء ما r گروه باشند قابل استفاده است.

مثال: ۱۰ توپ داریم. ۲تا قرمز، ۳تا سفید و ۵تا سیاه. به چند طریق می‌توان آنها را در یک خط چید (یا در ۱۰ جعبه قرار داد)؟

$$\binom{10}{2,3,5}=\frac{10!}{2!3!5!}$$

قضیهٔ چندجمله‌ای:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^N=\sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r=0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=N}}^{N}\binom{N}{k_1,k_2,\ldots,k_r}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$$

مثال: کلاسی ۲۰ نفر دانشجو دارد. باید ۳ نفر برای روابط عمومی، ۷ نفر برای همکاری با امور دانشجویی (و ۱۰ نفر برای همکاری با امور آموزشی) انتخاب شوند. تعداد حالات ممکنه برابر است با:

$$\binom{20}{3,7,10}=\frac{20!}{10!7!3!}$$

تا اینجا دیدیم که چگونه تعداد نقاط را حساب کنیم. حال در مثالهایی احتمال را حساب می‌کنیم (آزمایشهای با نتایج هم‌احتمال).

مثالهایی از تعیین احتمال واقعه‌ها در آزمایشهای با نتایج هم‌احتمال

مثال ۱: اگر یک سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه حداکثر ۳ بار شیر بیاید چقدر است؟

مجموعهٔ Ω، مجموعهٔ ۱۰تایی‌های مرتبی است که هر عضو این ۱۰تایی‌های مرتب می‌تواند H یا T باشد.

$$\Omega = \{HHH\cdots H, \ldots, TTT\cdots T\}$$

Ω دارای $۲^{۱۰}$ عضو است. فرض می‌کنیم این $۲^{۱۰}$ عضو متساوی الاحتمال باشند (سکه سالم باشد و پرتابها مستقل باشند).

کل حالات ممکنه = $۲^{۱۰}$

واقعهٔ A: حداکثر ۳ بار شیر بیاید.

این واقعه اجتماع چهار واقعهٔ غیرمتلاقی است:

واقعهٔ $A_۳$: دقیقاً ۳ بار شیر بیاید. واقعهٔ $A_۲$: دقیقاً ۲ بار شیر بیاید. واقعهٔ $A_۱$: دقیقاً ۱ بار شیر بیاید. واقعهٔ A_0: اصلاً شیر نیاید.

تعداد عناصر $A_۳$ = $\binom{10}{3}$ و به همین ترتیب تعداد عناصر $A_۲$، $A_۱$ و A_0 نیز به دست می‌آید:

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{176}{2^{10}} = 0.1719$$

مثال ۲: به طور کاملاً تصادفی m توپ را در n جعبه قرار می‌دهیم $(n \ge m)$. (احتمال قرار گرفتن هر یک از توپها در جعبه‌های مختلف مساوی است و حتماً هم در یکی از جعبه‌ها قرار می‌گیرد.)

احتمال اینکه این m توپ در m جعبهٔ مورد نظر (یکی در هر جعبه) قرار بگیرند چیست؟

الف) اگر هر جعبه گنجایش فقط یک توپ را داشته باشد؛

فرقی نمی‌کند چه توپها را متمایز بگیریم و چه غیرمتمایز (فلسفتاً چه فرقی می‌کند؟)

۱. توپها غیرمتمایز: کل حالات ممکنهٔ قرار گرفتن m توپ در n جعبه: $\binom{n}{m}$ متساوی الاحتمال

حالت مورد نظر m توپ در m جعبهٔ خاص: ۱

$$P = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

۲. توپها متمایز: حالات ممکنه: P_m^n متساوی الاحتمال (ترتیب: حالات ممکن برای اینکه از n شیء متمایز mتا را انتخاب کنیم با مهم بودن ترتیب)

حالات مورد نظر: $m!$

$$P = \frac{m!}{P_m^n} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

ب)   اگر گنجایش جعبه محدود نباشد (در هر جعبه هر تعداد توپ ممکن است قرار گیرد)؛

باز هم فرقی نمی‌کند توپها را متمایز بگیریم یا غیرمتمایز؛ ولی دقت کنید که چه چیزی را متساوی الاحتمال می‌گیرید.

۱. توپها متمایز: حالات ممکنه: n^m متساوی الاحتمال (برای هر توپ n حالت داریم)

حالات مورد نظر: $m!$

$$P = \frac{m!}{n^m}$$

۲. توپها غیرمتمایز: حالات ممکنه (ترتیب مهم نیست، تکرار مجاز است): $\binom{n+m-1}{m}$

حالات مورد نظر: ۱

$$P = \frac{1}{\binom{n+m-1}{m}}$$

این جواب با مفروضات مسأله (که احتمال قرار گرفتن هر توپ در جعبه‌های مختلف مساوی است) غلط است، زیرا $\binom{n+m-1}{m}$ حالت متساوی الاحتمال نیستند. مثلاً اگر $n = ۲$ و $m = ۲$، گر چه سه حالت داریم: 11 و 02 و 20؛ ولی این سه حالت متساوی الاحتمال نیستند و احتمال وقوع 11، $\frac{2}{4}$ است و نه $\frac{1}{3}$.

مگر اینکه صورت مسأله طوری باشد که این حالات متساوی الاحتمال فرض شده باشند.

(پس از متمایز گرفتن هیچ وقت ضرر نمی‌کنید.)

مثال ۳: جعبه‌ای شامل ۶۰ توپ قرمز و ۴۰ توپ سیاه است. ۲۰ توپ از این جعبه به طور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم (بدون جایگزینی). احتمال اینکه ۱۵تا از این توپها قرمز و ۵تا سیاه باشند چیست؟

نتایج آزمایش تصادفی: کلیهٔ روشهای ممکن در انتخاب ۲۰ توپ

تعداد حالات ممکنه (تعداد نقاط Ω): $\binom{100}{20}$ متساوی الاحتمال

تعداد حالات مطلوب: $\binom{60}{15}\binom{40}{5}$

$$P = \frac{\binom{60}{15}\binom{40}{5}}{\binom{100}{20}} = 0.065$$

متمایز یا غیرمتمایز گرفتن توپها فرقی ایجاد نمی‌کند. Ω را طوری تعریف کنید که نقاط متساوی الاحتمال باشند.

(راه غلط: تعداد حالات ممکنه: ۲۱ حالت، تعداد حالات مطلوب: ۱ حالت. ولی این ۲۱ حالت متساوی الاحتمال نیستند.)

اگر توپها را متمایز بگیریم، خواهیم داشت:

تعداد حالات ممکنه: $P_{20}^{100} = \dfrac{100!}{80!}$

تعداد حالات مطلوب: $\dfrac{20!}{15!5!}\dfrac{40!}{35!}\dfrac{60!}{45!} = \dbinom{20}{5} P_5^{40} P_{15}^{60} = 20!\dbinom{60}{15}\dbinom{40}{5}$

که حاصل تقسیم همان عدد قبلی خواهد بود.

برای محاسبهٔ تقریبی فاکتوریل‌های بزرگ می‌توانید از فرمول استرلینگ (Stirling's Formula) استفاده کنید:

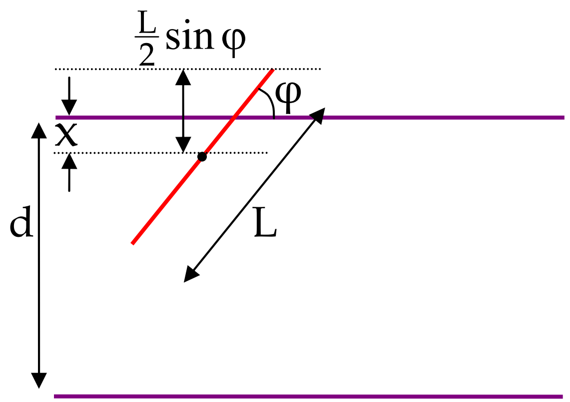
برای n بزرگ : $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

(برای $n = ۱۰$ خطا کمتر از ۱٪ است)

سرانجام مثالی از حالت Ω با نقاط غیرقابل شمارش می‌آوریم.

مثال ۴: مسألهٔ سوزن Buffon (1777)

سوزنی به طول L را روی کاغذی خط‌کشی شده که فاصلهٔ خطوط آن $d > L$ است می‌اندازیم. احتمال اینکه سوزن خطی را قطع کند چیست؟ با فرض اینکه کلیهٔ مکانهای مرکز سوزن و کلیهٔ جهتهای قرار گرفتن سوزن متساوی الاحتمال باشند.



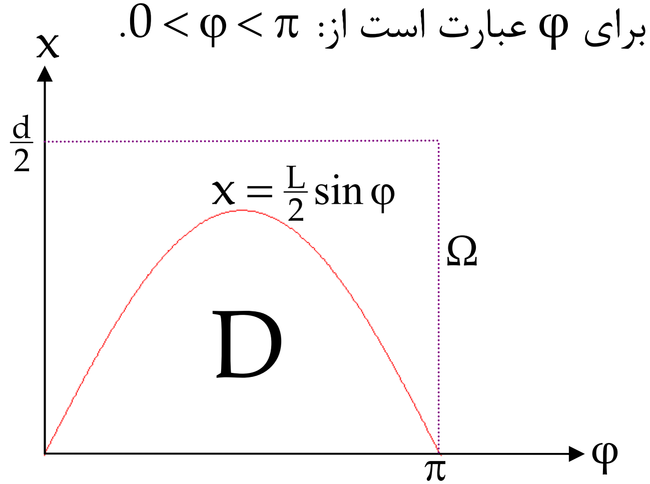
فرض کنید که فاصلهٔ مرکز سوزن از نزدیکترین خط x باشد و φ زاویه با این خط باشد.

در صورت تقاطع خواهیم داشت: $x < \frac{L}{2}\sin\varphi$؛

که مقادیر ممکنه (و متساوی الاحتمال) برای x عبارت است از: $0 < x < \frac{d}{2}$؛

(برای $x > \frac{d}{2}$ خط دیگر نزدیکتر خواهد بود و مسأله عیناً تکرار می‌شود) و مقادیر ممکنه برای φ عبارت است از: $0 < \varphi < \pi$.

یعنی احتمال را باید روی این سطح حساب کنیم:



$$P = \iint_D \alpha(x,\varphi)\,dx\,d\varphi \quad \left(= \frac{\text{تعداد نقاط مطلوب}}{\text{تعداد کل نقاط}} \right)$$

$$\alpha(x,\varphi) = \frac{1}{\pi \frac{d}{2}}$$

$$\Rightarrow P = \iint_D \frac{1}{\pi \frac{d}{2}}\,dx\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{d}{2}}\int_0^{\pi} \frac{L}{2}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2L}{\pi d}$$

جالب است که برای L و d مشخص به این ترتیب می‌توان به روش آماری π را تخمین زد! (روش مونت کارلو)

احتمال شرطی:

اگر M واقعه‌ای در Ω باشد که $P(M) \neq 0$، داریم:

$$P(A \mid M) \triangleq \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

تعبیر تجربی (فراوانی نسبی): اگر آزمایش تصادفی nبار انجام شود، داریم:

$$\frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{n_{A \cap M}}{n}}{\frac{n_M}{n}} = \frac{n_{A \cap M}}{n_M}$$

به این معنی که در n_Mباری که واقعهٔ M اتفاق افتاده، فراوانی نسبی (میزان تکرار نسبی) وقوع A چقدر است. یعنی اگر کلیهٔ آزمایشهایی که M در آنها اتفاق نیفتاده را دور بریزیم، فراوانی نسبی A اینقدر بوده است.

$P(A \mid M)$ را به صورت نسبت دو احتمال تعریف کردیم. اما از کجا معلوم که این هم یک احتمال باشد؟ (اگر چه از نظر تعبیر فرکانس نسبی احتمال است، اما باید توسط اصولمان این امر را نشان دهیم) برای این منظور باید نشان دهیم که در اصول سه‌گانه صدق می‌کند.

۱)

$$P(A|M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}\geq 0$$

۲)

$$P(\Omega|M)=\frac{P(\Omega\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M)}{P(M)}=1$$

۳) اگر $A\cap B=\varnothing$، داریم:

$$P(A\cup B|M)=\frac{P[(A\cup B)\cap M]}{P(M)}=\frac{P[(A\cap M)\cup(B\cap M)]}{P(M)}=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}+\frac{P(B\cap M)}{P(M)}$$
$$=P(A|M)+P(B|M)$$

لذا احتمالهای شرطی همهٔ خصوصیات یک احتمال معمولی را دارا می‌باشند و در تمام قضایایی که اثبات شد صدق می‌کنند.

مثلاً داریم: $P(A^c|M)=1-P(A|M)$

اگر $P(A) \neq 0$ باشد، از تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

حال با تعمیم آن، به شرط اینکه $P(AB) \neq 0$ باشد، داریم:

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

قاعدهٔ زنجیری: اگر $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) \neq 0$ باشد، آنگاه:

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots P(A_n \mid A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

مثال ۱: در آزمایش انداختن تاس اگر بدانیم که تاس زوج آمده است، احتمال اینکه کوچکتر از ۴ باشد چیست؟

A = { کوچکتر از ۴ } = {۱, ۲, ۳}

B = { زوج } = {۲, ۴, ۶}

$\Rightarrow A \bigcap B = \{۲\}$

$\Rightarrow P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3} \rightarrow$ فضای نمونه کاهش یافته

در حالی که $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$، یعنی $P(A\,|\,B)$ کمتر از $P(A)$ است (واقعهٔ B اطلاعات منفی در مورد وقوع A دارد).

مثال ۲: احتمال اینکه خرابی دیود پس از لحظهٔ t اتفاق بیفتد $e^{-\alpha t^2}$ است. احتمال اینکه بین لحظات t_1 و t_2 خراب شود چه خواهد بود اگر بدانیم که تا لحظهٔ T که $T < t_1 < t_2$ درست کار می‌کرده است؟

آزمایش تصادفی: خراب شدن دیود

$\Omega = \{t : 0 \le t < \infty\} \rightarrow \quad t$: زمان خرابی

$$P(\{\tau \le t < \infty\}) = e^{-\alpha\tau^2}$$

$$A = \{t_1 < t < t_2\} = \{t_1 < t < \infty\} - \{t_2 \le t < \infty\}$$

$$M = \{T \le t < \infty\}$$

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)}{P(M)} = \frac{e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}}{e^{-\alpha T^2}}$$

یعنی $P(A \mid M)$ بزرگتر از $P(A)$ است (واقعهٔ M اطلاعات مثبت در مورد وقوع واقعهٔ A دارد).

مثال ۳: مؤسسه‌ای که در آن آقای x کار می‌کند یک مهمانی شام برای کارمندانی که حداقل یک پسر داشته باشند ترتیب داده است. اگر بدانیم که آقای x دو فرزند دارد و به مهمانی دعوت شده است، احتمال اینکه هر دو فرزند او پسر باشند چقدر است؟

$$\Omega = \{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$$

فرزند اول   فرزند دوم

E : هر دو فرزند پسر

F : حداقل یک فرزند پسر

$$P(E\,|\,F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P\{(b,b)\}}{P\{(b,b),(b,g),(g,b)\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

نه $\frac{1}{2}$ (فرزند دیگر یا پسر است یا دختر). در حالی که سه پیشامد هم‌شانس داریم: (b,b) , (b,g) , (g,b)

مثال ۴: ظرفی دارای ۸ توپ قرمز و ۴ توپ سفید است. دو توپ (بدون جایگذاری) انتخاب می‌کنیم. اگر انتخاب هر یک از توپها هم‌شانس باشد احتمال اینکه هر دو توپ انتخابی قرمز باشند چیست؟

قبلاً به دست آورده بودیم: $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$ یا $\frac{P_2^8 + P_2^8}{P_2^{12}}$؛

نقاط Ω را توپهای داخل ظرف می‌گیریم.

R_1 : قرمز بودن توپ اول $\quad \Rightarrow P(R_1) = \frac{8}{12}$

R_2 : قرمز بودن توپ دوم $\quad \Rightarrow P(R_2 \mid R_1) = \frac{7}{11}$

$$\Rightarrow P(R_1 R_2) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = 0.424$$

احتمال شرطی را به عنوان ابزاری برای محاسبهٔ احتمال پیشامدها می‌توان استفاده کرد.

قضیهٔ احتمال کل (Total Probability Theorem):

اگر $i = 1, 2, \ldots, m$ و B_iها افرازی از Ω باشند، برای هر واقعهٔ دلخواه A از Ω داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

اثبات:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)) = P[\bigcup_{i=1}^{m}(A \cap B_i)] = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

از این قضیه برای محاسبهٔ احتمال یک واقعه ($P(A)$) که احتمال‌های مشروط آن ($P(A \mid B_i)$) داده شده استفاده می‌کنیم.
یعنی $P(A)$ متوسط وزن‌داده‌شده‌های از $P(A \mid B_i)$ها است که مقدار وزن $P(B_i)$ است.

مثال: دو جعبه داریم. جعبهٔ اول شامل ۲تا ترانزیستور خراب و ۸تا سالم است. جعبهٔ دوم شامل ۹تا ترانزیستور خراب و ۶تا سالم است. به طور تصادفی یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و از جعبهٔ انتخاب شده به طور تصادفی یک ترانزیستور برمی‌داریم. احتمال اینکه ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد چقدر است؟

نقاط Ω عبارت است از ترانزیستورهای موجود در دو جعبه

واقعهٔ B_1 عبارت است از ۱۰ ترانزیستور جعبهٔ اول

واقعهٔ B_2 عبارت است از ۱۵ ترانزیستور جعبهٔ دوم

واقعهٔ خراب (D) عبارت است از ۱۱ ترانزیستور خراب

واقعهٔ سالم شامل ۱۴ ترانزیستور سالم است

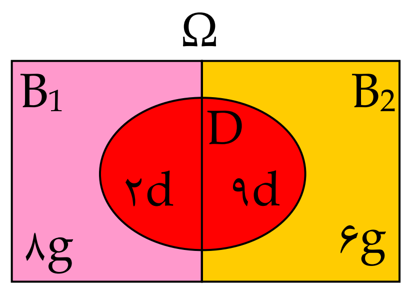
طبق مفروضات مسأله داریم:

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(D\,|\,B_1)=\frac{2}{10},P(D\,|\,B_2)=\frac{9}{15}$$

باید $P(D)$ را به دست آوریم:

$$P(D)=P(B_1)P(D\,|\,B_1)+P(B_2)P(D\,|\,B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{15}=0.4$$



در برخی موارد $P(A | B_i)$ها داده شده و ما طالب $P(B_i | A)$ها هستیم. در این صورت از **قضیهٔ بِیز** کمک می‌گیریم.

قضیهٔ بیز (Bayes Theorem):

اگر $i = 1, 2, \ldots, m$ و B_iها افرازی از Ω باشند، برای هر واقعهٔ دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A | B_i)P(B_i)}$$

اثبات:

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A | B_i)P(B_i)}$$

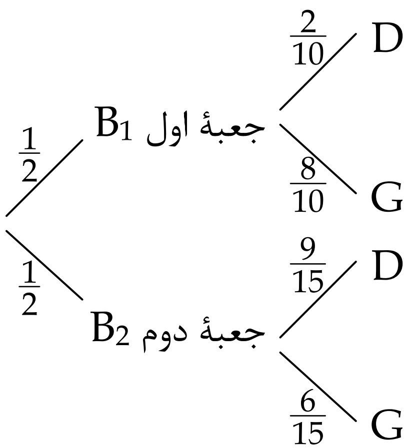
قضیهٔ بیز کاربرد بسیار زیادی در آمار، تخمین و آشکارسازی دارد و در تحلیل نحوه یا علت وقوع واقعه‌های انجام شده از آن استفاده می‌شود.

مثال ۱: در مثال پیش اگر ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد احتمال اینکه متعلق به جعبهٔ دوم باشد چقدر است؟

$P(D)$ را قبلاً حساب کردیم. پس داریم:

$$P(B_2 \mid D) = \frac{P(D \mid B_2)P(B_2)}{P(D)} = \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{2}}{0.4} = \frac{3}{4}$$

درخت احتمال (دیاگرام درختی):



$$P(B_2 \mid D) = \frac{P(D \mid B_2)P(B_2)}{P(D)} = \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

اصطلاحاً $P(B_2)$ را احتمال پیشین (A Priory Probability) جعبهٔ دوم و $P(B_2 \mid D)$ را احتمال پسین (A Posteriory Probability) آن گویند.

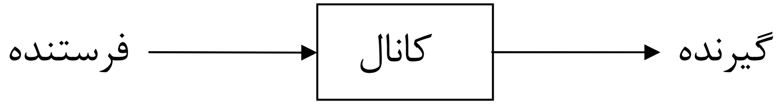
ضمناً توجه کنید که: $P(B_1 \mid D) = \frac{1}{4}$ (یعنی $1 - \frac{3}{4}$).

اصولاً اگر $i = 1, 2, \ldots, m$ و B_iها افرازی از Ω باشند، داریم: $\sum_{i=1}^{m} P(B_i \mid A) = 1$.

توجه کنید که اگر جای شرط و مشروط را عوض کنید این رابطه دیگر صادق نیست.

چه در قضیهٔ احتمال کل و چه در قضیهٔ بیز اگر B_iها افرازی از واقعهٔ A یا واقعهٔ شامل واقعهٔ A باشند نیز قضایا صادق خواهند بود.

مثال۲: کانال مخابراتی دیجیتال

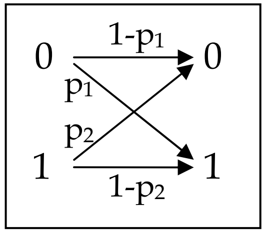


پیغام به صورت باینری کد شده و ارسال می‌شود و احتمال ارسال صفر p (و احتمال ارسال یک $1-p$ است).

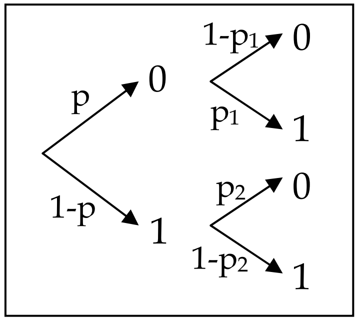
ولی به دلیل وجود نویز بعضی 0ها به 1 و بعضی 1ها به 0 تبدیل می‌شوند.

احتمال خطای نوع اول p_1 و احتمال خطای نوع دوم p_2 است.

دیاگرام احتمال گذر (Transition Probability Diagram):



دیاگرام درختی:



نقاط فضای نمونه ترکیب ارسال و دریافتهای مختلف ((T,R)) است. ولی این نقاط هم‌احتمال نیستند:

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

اگر واقعهٔ T_0، واقعهٔ ارسال 0 باشد، داریم: $T_0 = \{(0,0),(0,1)\}$ و $P(T_0) = p$؛

اگر واقعهٔ T_1، واقعهٔ ارسال 1 باشد، داریم: $T_1 = \{(1,0),(1,1)\}$ و $P(T_1) = 1-p$؛

اگر واقعهٔ R_0، واقعهٔ دریافت 0 باشد، داریم: $R_0 = \{(0,0),(1,0)\}$؛

اگر واقعهٔ R_1، واقعهٔ دریافت 1 باشد، داریم: $R_1 = \{(0,1),(1,1)\}$؛

و می‌دانیم که:

$$P(R_1|T_0)=p_1 \quad , \quad P(R_0|T_1)=p_2$$

۱. احتمال خطا، یعنی $P(E)$ چقدر است؟

۲. اگر صفر دریافت شده باشد احتمال اینکه واقعاً صفر ارسال شده باشد، یعنی $P(T_0 | R_0)$ چیست؟

۳. اگر یک دریافت شده باشد احتمال اینکه واقعاً یک ارسال شده باشد، یعنی $P(T_1 | R_1)$ چیست؟

$$\begin{aligned} P_{error} &= P(E) = P(E | T_0)P(T_0) + P(E | T_1)P(T_1) \\ &= P(R_1 | T_0)P(T_0) + P(R_0 | T_1)P(T_1) = p \times p_1 + (1-p) \times p_2 \end{aligned}$$

$$P(T_0 | R_0) = \frac{P(T_0)P(R_0 | T_0)}{P(T_0)P(R_0 | T_0) + P(T_1)P(R_0 | T_1)} = \frac{p \times (1-p_1)}{p \times (1-p_1) + (1-p) \times p_2}$$

$$P(T_1 | R_1) = \frac{P(T_1)P(R_1 | T_1)}{P(T_1)P(R_1 | T_1) + P(T_0)P(R_1 | T_0)} = \frac{(1-p)\times(1-p_2)}{(1-p)\times(1-p_2) + p\times p_1}$$

مثلاً اگر $p_1 = p_2 = p_e = 0.05$ و $p = 0.9$ باشد، خواهیم داشت:

$$P_{error} = p\times p_e + (1-p)\times p_e = p_e = 0.05$$
$$P(T_1 | R_1) = \frac{0.1\times 0.95}{0.1\times 0.95 + 0.9\times 0.05} = 0.68$$

ولی اگر $p = 0.6$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$P(T_1 | R_1) = \frac{0.4\times 0.95}{0.4\times 0.95 + 0.6\times 0.05} = 0.926$$

در یک کانال خوب p_e باید حدود 10^{-6} باشد.

اصولاً اثر مخابره آن است که احتمال پیشین پیغام را به احتمال پسین آن تغییر دهد، مثلاً با دریافت 0، $P(T_0)$ به $P(T_0 | R_0)$ تغییر می‌یابد.

مثال ۳: سه سکه داریم. سکهٔ C_1 هر دو طرفش شیر، سکهٔ C_2 هر دو طرفش خط و سکهٔ C_3 یک طرفش شیر و طرف دیگرش خط است. یکی از این سه را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می‌کنیم. اگر طرف هویدای این سکه شیر باشد، احتمال اینکه طرف دیگرش خط باشد چیست؟

$$P(C_3 | H) = \frac{P(H|C_3)P(C_3)}{P(H|C_1)P(C_1) + P(H|C_2)P(C_2) + P(H|C_3)P(C_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

وقایع مستقل (Independent Events):

دو واقعهٔ A و B را مستقل گویند، هرگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

از طرفی (اگر $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند) داریم: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. پس اگر A و B مستقل باشند، داریم:

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

تعبیر تجربی: $P(A|B) \simeq \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{n_A}{n} \simeq P(A)$؛ یعنی فرکانس نسبی وقوع A در کل n آزمایش با فرکانس نسبی آن در n_B آزمایش که B در آنها رخ داده یکسان است (موافق با شهود ما از مفهوم استقلال).

قضیه: اگر A و B مستقل باشند، $\bar{A}$ و B نیز مستقلند.

اثبات: صفحهٔ ۵۵ کتاب.

از اعمال مجدد همین قضیه داریم:

قضیه: اگر A و B مستقل باشند، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نیز مستقلند.

اما اگر A از B و A از C مستقل باشد، A از BC یا ترکیبهای دیگر B و C مستقل نخواهد بود (راس، صفحهٔ ۸۲). لذا تعریف استقلال سه واقعه باید فراتر از استقلال دو به دوی آنها باشد.

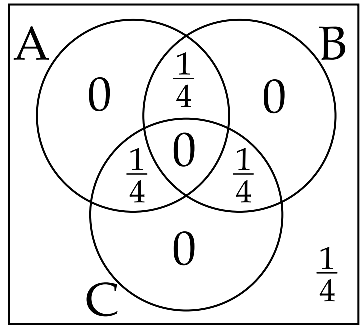
سه واقعهٔ A و B و C را مستقل گویند، هرگاه:

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad P(AC)=P(A)P(C) \quad P(BC)=P(B)P(C) \quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

یعنی اگر سه واقعه مستقل باشند، دو به دو نیز مستقلند؛ ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست.

در تمرین نشان خواهید داد که اگر A و B و C مستقل باشند، A از $\overline{BC}$ و $B+C$ (و اصولاً از هر ترکیب آنها) مستقل است.

اصولاً هیچ یک از این چهار رابطه از سه رابطهٔ دیگر نتیجه نمی‌شود:



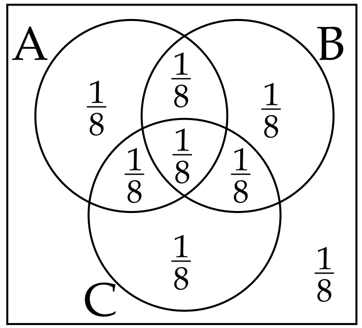
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☒ $0\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

دو به دو مستقل



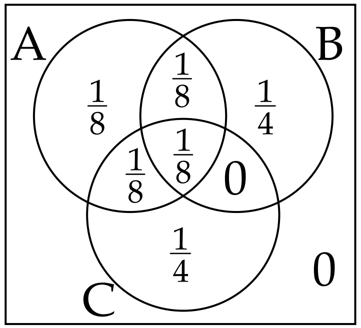
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

مستقل



☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☒ $\frac{1}{8}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

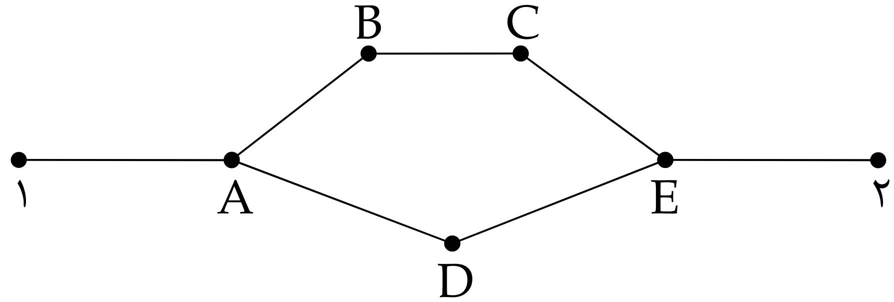
A و B مستقل، A و C مستقل

n واقعهٔ A_1، A_2، ... و A_n را مستقل گویند، هرگاه برای هر دسته اعداد صحیح $k_1,k_2,\dots,k_r$ (که $r\le n$) داشته باشیم:

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_r})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_r})$$

یعنی $2^n-(n+1)$ رابطه باید صادق باشند.

مثال: یک لینک مخابراتی بین نقاط ۱ و ۲ از ایستگاه‌های A و B و C و D و E استفاده می‌کند (از D وقتی استفاده می‌شود که B یا C از کار بیفتد). تمام ایستگاه‌های رله مثل همند و بررسی‌های آماری نشان داده است که احتمال سالم بودن آنها در طی زمان T برابر با p است. احتمال اینکه لینک بین ۱ و ۲ در این زمان برقرار باشد چقدر است (با فرض استقلال خرابی رله‌ها)؟



احتمال اینکه خط بالایی مسیر موازی کار کند p^2 است (بنا بر استقلال خرابی دو ایستگاه):

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = p^2$$

اگر چه این نتیجه صحیح است، ولی مفهوم آن بر مبنای اصول احتمال چیست؟ اصلاً $B \cap C$ یعنی چه؟

اگر آزمایشهای تصادفی خراب شدن ایستگاههای مختلف را جدا در نظر بگیریم اشتراک بین آنها مفهوم ندارد.

در اینجا Ω حاصلضرب دکارتی فضای نمونهٔ آزمایشهای تصادفی خراب شدن ایستگاهها است و 2^5 نقطه دارد (غیرمتساوی الاحتمال):

$$\Omega = \{(\underset{A}{\underset{\uparrow}{F}},\underset{B}{\underset{\uparrow}{F}},\underset{C}{\underset{\uparrow}{F}},\underset{D}{\underset{\uparrow}{F}},\underset{E}{\underset{\uparrow}{F}}),(F,F,F,F,T),\ldots,(T,T,T,T,T)\}$$

خراب بودن A عبارت است از کلیهٔ ۵تایی‌های مرتب که عنصر اول آنها F باشد.

$$\begin{aligned}
\text{احتمال برقرار بودن لینک} &= P(A(BC+D)E) \\
&= P(A)P(BC+D)P(E) \\
&= P(A)[P(BC)+P(D)-P(BCD)]P(E) \\
&= P(A)[P(B)P(C)+P(D)-P(B)P(C)P(D)]P(E) \\
&= p(p^2+p-p^3)p = p^3(1+p-p^2)
\end{aligned}$$

مثلاً اگر $p = 0.9$ باشد، احتمال فوق 0.795 خواهد بود.